Permütasyonlar ve Determinantlar

Tanım: M bir cümle olsun. M den M ye 1-1 ve örten bir fonksiyona M nin bir permütasyonu denir.

Örnek: $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to I(x) = x$, özdeşlik dönüşümü 1-1 ve örtendir. O halde I, $\mathbb{R}$ nin permütasyonudur.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to f(x) = 2x$ 1-1 ve örten olup f, $\mathbb{R}$ nin permütasyonudur.

Bir M cümlesinin bir permütasyonu demek, M nin elemanları arasında yeni bir sıralama oluşturmak demektir. Yani M nin elemanlarının yeni bir dizilişini elde etmek demektir.

Permütasyonlar genellikle σ, τ gibi sembollerle gösterilirler.

$M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ve σ, M nin bir permütasyonu ise,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix} \quad \text{veya} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

ile gösterilir.

Örnek: $M = \{a, b\}$ için M nin permütasyonlarını yazalım.

$\sigma_1 : M \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} M$

$a \to \sigma_1(a) = a$

$b \to \sigma_1(b) = b$

$\sigma_2 : M \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} M$

$a \to \sigma_2(a) = b$

$b \to \sigma_2(b) = a$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Örnek: $M=\{1,2,3\}$ kümesinin bütün permütasyonlarını yazalım.

$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ $\sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ $\sigma_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$

$\sigma_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$, $\sigma_6=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$

Teorem: Birbirinden farklı n-tane elemana sahip bir M kümesinin bütün permütasyonlarının sayısı $n!$ dir.

Permütasyon Grupları

n elemanlı bir M kümesinin bütün permütasyonlarının kümesi S_n ile gösterilir.

$$S_n=\{\sigma \mid \sigma: M \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} M\}$$

Teorem: S_n kümesi fonksiyonların bileşkesi (çarpımı) işlemi ile birlikte bir gruptur.

İspat: $\forall \sigma,\tau \in S_n$ için σ ile τ nun çarpımı $\sigma\circ\tau$ veya $\sigma.\tau$ ile gösterilir ve $\forall x\in M$ için

$(\sigma\circ\tau)(x)=\sigma(\tau(x))$ ile tanımlanır.

$\sigma: M\to M$ 1-1 ve örten, $\tau: M\to M$ 1-1 ve örten olduğundan $\sigma\circ\tau: M\to M$ 1-1 ve örtendir. Yani $\sigma\circ\tau\in S_n$ dir. $\circ: S_n\times S_n\to S_n$ iç işlemdir.

1) $\forall \sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\in S_n$ için bunların her biri de aynı zamanda fonksiyon ve fonksiyonların bileşke işlemi birleşimli olduğundan

$$\sigma_1\circ(\sigma_2\circ\sigma_3)=(\sigma_1\circ\sigma_2)\circ\sigma_3$$

dir.

2) $\varepsilon : M \longrightarrow M$ özdeşlik dönüşümü 1-1 ve
$x \longrightarrow \varepsilon(x) = x$ örtendir. $\varepsilon \in S_n$ dir.

Aynı zamanda $\forall \sigma \in S_n$ için $\sigma \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \sigma = \sigma$ dır.

O halde ε birimdir.

3) $\forall \sigma \in S_n$ için $\sigma : M \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} M$ dir.

O halde $\sigma^{-1} : M \to M$ ters fonksiyonu var ve σ^{-1}'de 1-1 ve örtendir. $\sigma^{-1} \in S_n$ dir.

Ayrıca $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \varepsilon$ olur.

Sonuç olarak $(S_n, \circ)$ ikilisi gruptur. Bu gruba <u>permütasyon grubu</u> denir.

<u>Örnek</u>: $M = \{1,2,3\}$ için $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

ve $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ için $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ olur

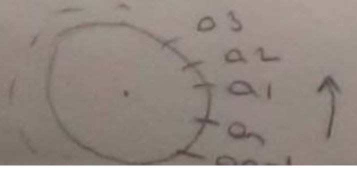
<u>NOT</u>: $\sigma, \tau \in S_n$ için genellikle $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$ dır.

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ve $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ permütasyonları için görelim.

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Dairesel Permütasyon!

M cümlesi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibi birbirinden farklı n-tane elemana sahip olsun. M nin elemanlarını birim çember üzerine eşit aralıklarla sıralayalım.



Her bir aralığın uzunluğu $\frac{2\pi}{n}$ radyan olur.

Çemberi merkezi etrafında pozitif yönde $\frac{2\pi}{n}$ radyan döndürelim. Bu durumda $a_1 \to a_2$, $a_2 \to a_3$ .... $a_{n-1} \to a_n$, $a_n \to a_1$ olur. Böylece $M \to M$ bir permütasyon elde etmiş oluruz. Bu permütasyonu

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{veya} \quad \sigma = (\overrightarrow{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n})$$

şeklinde gösteririz.

<u>Tanım</u>: $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ olmak üzere $\sigma = (a_1, a_2 \ldots a_n)$ permütasyonuna M'nin bir dairesel permütasyonu denir. Dairesel gösterimdeki eleman sayısına o permütasyonun uzunluğu adı verilir. Uzunluğu 2 olan dairesel permütasyona transpozisyon adı verilir.

<u>NOT</u>: Resimleri kendilerine eşit olan elemanlar dairesel gösterimde yer almazlar.

<u>Örnek</u>: $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $\sigma = (1, 3, 4, 5) \in S_5$

M kümesi 5 elemanlı 5! tane permütasyonu var.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Tanım</u>: Bir M kümesinin farklı iki dairesel permütasyonunda M'nin aynı elemanı yer almıyorsa bu permütasyonlara ayrık dairesel permütasyonlar denir.

<u>Örnek</u>: $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olsun.

$\sigma = (1, 2, 4)$ ve $\tau = (3, 5, 6) \in S_6$ ayrık dairesel permütasyonlardır. (σ e τ nun ortak elemanları yok.)

Not: 1) Özdeşlik permütasyonun uzunluğu 1 kabul edilir.

2) σ ve τ ayrık dairesel permütasyonlar ise
$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ dır.

Örnek: Bir önceki örnek için $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ dır.

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

ve $\tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

3) Eğer σ, uzunluğu k dan dairesel permütasyon ise, $\sigma^k = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \cdots \circ \sigma}_{k\text{-tane}} = \varepsilon$ olur.

4) En az iki elemanlı bir kümenin herbir dairesel permütasyonu transpozisyonların çarpımı olarak yazılabilir. Bu yazılış şu şekildedir.

$\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ ise $\sigma = (a_1, a_n)(a_1, a_{n-1}) \ldots (a_1 a_3)(a_1 a_2)$

~~Örnek!~~ $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,6)(2,5)$

Tek ve Çift Permütasyonlar

Sonlu bir M kümesinin bir permütasyonu tek sayıda transpozisyonun çarpımı ise permütasyona tek, çift sayıda transpozisyonun çarpımı ise permütasyona çift permütasyon denir.

Eğer σ tek permütasyon ise $s(\sigma) = -1$
σ çift " " $s(\sigma) = +1$ alınır.

NOT! Bir M cümlesinin permütasyonlarının yarısı tek yarısı çifttir.

Örnek: $M = \{1,2,3\}$ cümlesinin permütasyonlarını yazınız. Tek ve çift olanları belirleyiniz

Çözüm!

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 0 tane transpozisyonun çarpımı olarak yazılır. 0 çift olduğundan $s(\sigma_1) = +1$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2,3)$ $\quad s(\sigma_2) = -1$

$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3)$, $\quad s(\sigma_3) = -1$

$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1,2)$ $\quad s(\sigma_4) = -1$

$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,2) = (1,2) * (1,3)$
$s(\sigma_5) = +1$

$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3) = (1,3).(1,2)$
$s(\sigma_6) = +1$

$$s(\sigma\tau) = s(\sigma).s(\tau)$$
$$s(\sigma^{-1}) = \frac{1}{s(\sigma)}$$

$n > 2$ elemanlı bir M cümlesinin tek permütasyonlarının cümlesi T_n, çift permütasyonlarının cümlesi C_n ile gösterelim. Buna göre $T_n = \{\sigma \in S_n \mid s(\sigma) = -1\}$
$C_n = \{\sigma \in S_n \mid s(\sigma) = 1\}$ dir.

n-lineer Fonksiyonlar

$V_1, V_2 \dots, V_n$ ve W, F cismi üzerinde vektör uzayları olsunlar.

$$L : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$$
$$(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n) \longrightarrow L(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n)$$

dönüşümü için aşağıdaki özellikler sağlanırsa Lye n-lineer fonksiyon denir.

$\forall i$ için

1) $L(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_{i-1}, \alpha+\beta, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n) = L(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_{i-1}, \alpha, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n)$
$+ L(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n)$

2) $L(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_{i-1}, \lambda\alpha, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) = \lambda L(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_{i-1}, \alpha, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n)$

$V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ den W ye olan bütün n-lineer fonksiyonların cümlesi $\mathcal{L}(V_1, V_2 \dots, V_n ; W)$ ile gösterilir.

$\mathcal{L}(V_1, V_2 \dots, V_n ; W) = \{ L \mid L : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \xrightarrow{n\text{-lineer}} W \}$ dir.

Bu cümle üzerinde tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemleriyle birlikte bir vektör uzayıdır. Bu uzaya n-lineer fonksiyonların uzayı denir.

<u>Tanım</u>: f n-lineer fonksiyon olsun.

$f(\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_i, \dots \alpha_i, \dots \alpha_n) = 0$ ise f ye alternedir, denir.

Tanım: f n-lineer fonksiyon olsun.

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n) = -f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n)$$

ise f ye anti simetriktir, denir.

Determinantlar

$A \in K^n_n$ matrisi verilsin. A nın satırlarını $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ ile gösterelim. $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ K^n uzayının standart bazı olmak üzere

$$f(e_1,e_2,\dots,e_n) = 1 \qquad (1 \text{ } K\text{nın } 2.\text{iş. birimi})$$

olacak biçimde birtek alterne, n-lineer

$$f: K^n \times K^n \times \dots \times K^n \longrightarrow K$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n \longrightarrow f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = \sum_{\sigma\in S_n} S(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon yardımıyla elde edilen $f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) \in K$ sayısına $A=[a_{ij}] \in K^n_n$ matrisinin determinantı denir ve $\det A$ veya $|A|$ ile gösterilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2_2$ için $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ olduğunu determinant tanımı kullanarak bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{---}\ \alpha_1 \\ \text{---}\ \alpha_2 \end{array}$$

$$\det A = f(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{\sigma\in S_2} S(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2}$$

Burada S_2 iki elemanlı $M=\{1,2\}$ kümesinin tüm permütasyonlarının kümesidir. $S_2=\{\sigma_1,\sigma_2\}$

$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$ $s(\sigma_1)=1$ $\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}=(1,2)$ $s(\sigma_2)=-1$

$$\det A=f(\alpha_1,\alpha_2)=s(\sigma_1)\underbrace{a_{\sigma_1(1)1}}_{\sigma_1 \text{ de } 1,1\text{e gider}}a_{\sigma_1(2)2}+s(\sigma_2)\underbrace{a_{\sigma_2(1)1}}_{\sigma_2 \text{ de } 1,2\text{ye gitmiş. } 2,1\text{e}}a_{\sigma_2(2)2}$$

$$=(+1)a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

Ödev: $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ Matrisinin determinantını determinant tanımı kullanarak hesaplayınız.

$$\sum_{\sigma\in S_3}s(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}\quad,S_3=\{\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_6\}$$

NOT: Determinant ile ilgili pratik hesaplama yöntemlerini ve determinant fonksiyonunun özelliklerini bildiğimizi kabul edeceğiz.

Determinant Yardımıyla Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

n-bilinmeyenli ve m-tane denklemden oluşan $AX=B$ lineer denklem sistemi verilsin. Eğer $B=0$ ise $AX=0$ sistemine homojen lineer denklem sistemi adı verilir. Bu sistemin $X=(0,0,\dots,0)$ şeklinde bir çözümü daima vardır. Bu çözüme sistemin aşikar çözümü denir. Şimdi $AX=0$ sisteminin aşikar olmayan çözümlerini inceleyelim.

$A \in \mathcal{F}^m{}_n$ olup A ya karşılık gelen lineer dönüşüm

$$A : \mathcal{F}^n \xrightarrow{lin} \mathcal{F}^m$$
$$X \longrightarrow A(X) = AX$$ şeklinde tanımlıdır

<u>Önerme</u>: $X \in \mathcal{F}^n$ $AX=0$ ın çözümüdür $\Leftrightarrow$ $X \in$ Çek$A$ dır.

İspat: $\Rightarrow$ X, $AX=0$ için çözümü olsun.

$A(X)=0 \Rightarrow X \in$ Çek$A$ dır.

$\Leftarrow$) $X \in$ Çek$A$ olsun $A(X)=0$, $AX=0$ X, AX ın çözümüdür.

<u>Çözüm Uzayı</u>: $AX=0$ homojen lineer denklem sisteminde X çözümleri $A : \mathcal{F}^n \longrightarrow \mathcal{F}^m$ ye lineer dönüşümünün çekirdeğinde yer alırlar. O halde çözümler bir vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya sistemin çözüm uzayı denir.

Çözüm uzayı = Çek$A$

boy(çözüm uzayı) = boy(Çek$A$) = sıfırlıkA

<u>Örnek</u>: n-bilinmeyenli, m denklemli $AX=0$ sisteminde rank$A=p$ ise sistemin çözüm uzayının boyutu $n-p$ dir, gösteriniz.

<u>Çözüm</u>: $A : \mathcal{F}^n \xrightarrow{lin} \mathcal{F}^m$
$X \longrightarrow A(X) = AX$ için

$$\underbrace{\text{rank}A}_{p} + \text{sıfırlık}A = \text{boy}(\mathcal{F}^n)$$

sıfırlık$A = n-p$

boy(çözüm uzayı) $= n-p$